



دفترچه سؤالات به همراه پاسفنامه تشریحی مرحله دوم بیستمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۱

| مدت آزمون (دقیقه) | تعداد سؤالات | |
|----------------------|-----------------|--------------|
| | مساله‌های کوتاه | چند گزینه‌ای |
| - | ۶ | - |

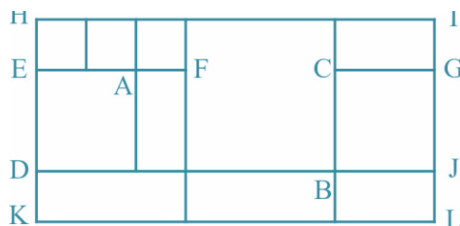
استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

توضیحات مهم

۱. کد برگه سؤالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سؤالات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سؤالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سؤالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.
۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. در سوال‌های چهار گزینه‌ای به هر پاسخ درست ۳ نمره مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره منفی تعلق می‌گیرد. در مساله‌های کوتاه به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.
۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.
۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.

۱- a_1, a_2, \dots, a_n را یک جای گشت از اعداد $1, 2, \dots, n$ می نامیم هرگاه $\{1, 2, \dots, n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان 1 تا n هستند که احتمالاً ترتیب آن ها تغییر کرده است). تمام جای گشت های 1 تا n مانند a_1, a_2, \dots, a_n را بیابید که برای $1 \leq i \leq n$ $(a_1 + a_2 + \dots + a_i)$ بر 2 یا $1 + i$ بخش پذیر باشد. برای مثال $a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 2$ یک جای گشت از اعداد $1, 2, 3, 4$ است.

۲- یک مستطیل را به وسیله ی تعدادی مستطیل (کوچک تر) پوشانده ایم به طوری که مستطیل ها به جز احتمالاً در رئوس و اضلاع باهم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل های پوشاننده موازی اضلاع مستطیل اصلی هستند، هم چنین هیچ قسمتی از مستطیل ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت ها را نشان می دهد:



بنابراین هر طور که مستطیل را به وسیله ی مستطیل های کوچک تر با توجه به شرایط فوق پوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره خط ها دیده می شود، یک نقطه ی برخورد را یک «چهارراه» می گوئیم هرگاه محل تقاطع دو پاره خط باشد، مثلاً در شکل بالا نقاط A و B چهارراه هستند ولی نقاط C و D و K چهارراه نیستند، هم چنین در این شکل 5 خط افقی و (KL, KJ, CG, EF, HI) و 6 خط عمودی دیده می شود، در ضمن شکل به وسیله ی 10 مستطیل پوشانده شده است. نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط های افقی، عمودی و تعداد چهارراه ها در نظر بگیریم، و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل های پوشاننده به اضافه ی عدد سه.

۳- در چهارضلعی محدب $ABCD$ داریم $\angle ABC = \angle ADC = 135^\circ$. ضمناً M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می باشند به طوری که $\angle MCD = \angle NCB = 90^\circ$ ، هم چنین K محل برخورد دو دایره های محیطی دو مثلث ABD و AMN هست. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

۴- A و B دو نقطه ی ثابت در صفحه ی می باشند. چهارضلعی محدب $ABCD$ به گونه ای ساخته می شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه ی $\angle ADC = 90^\circ$. ثابت کنید نقطه ای ثابت وجود دارد به طوری که هر طور چهارضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می گذرد.

۵- مجموعه ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ ترین توسعه داده ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a + b\delta$ هستند که $a, b \in R$ (نشان دهنده ی مجموعه ی اعداد حقیقی است). قرارداد می کنیم که $a + b\delta = a' + b'\delta$ اگر و تنها اگر $a = a'$ و $b = b'$. δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^2 = 0$! روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می شود:

$$(a + b\delta) + (a' + b'\delta) = (a + a') + (b + b')\delta$$

$$(a + b\delta)(a' + b'\delta) = aa' + ab'\delta + ba'\delta' + bb'\delta^2 = aa' + (ab' + ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید که این چند جمله ای در R ریشه ی مضاعف دارد، اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه های غیر حقیقی داشته باشد. (ریشه ی غیر حقیقی یعنی ریشه ای به شکل $a + b\delta$ که $b \neq 0$). توضیح می گوئیم a ریشه ی مضاعف چند جمله ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x - a)^2$ بخش پذیر باشد.

۶- در یک کلاس 20 نفره در سال گذشته 100 مسابقه ی تنیس روی میز بین بچه های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده اند. بچه های کلاس می خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی کرده باشند، می دانیم که این کار به 4050 طریق مختلف امکان پذیر است. ثابت کنید همه ی بچه های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده اند.

راه حل سؤالات مرحله دوم بیست و دومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۱

۱- ابتدا ثابت می‌کنیم که به ازای هر $n \geq 3$ ، اگر a_1, a_2, \dots, a_n جای‌گشتی با خاصیت موردنظر باشد، آنگاه $a_n = n$ برای اثبات دو حالت را در نظر می‌گیریم:

الف. اگر n فرد باشد. آنگاه بنا به فرض مسئله،

$$n \mid 2(a_1 + \dots + a_{n-1}) = 2(1 + 2 + \dots + n - a_n) = n(n+1) - 2a_n$$

در نتیجه $n \mid 2a_n$ و چون n فرد است، $n \mid a_n$ که با توجه به این که $a_n \leq n$ نتیجه می‌گیریم $a_n = n$.

ب. اگر n زوج باشد ($n = 2k$)، آنگاه همانند قسمت قبل $n \mid 2a_n$ لذا $n \mid a_n$ و $k \mid a_n$ ، بنابراین $a_n = 2k$ یا $a_n = k$.

اگر $a_n \neq n$ آنگاه باید $a_n = k$ اما بنا به فرض مسئله $i = n - 2$ می‌دانیم:

$$n-1 \mid 2(a_1 + \dots + a_{n-2}) = 2(1 + 2 + \dots + n - a_n - a_{n-1})$$

$$= n(n+1) - 2a_n - 2a_{n-1}$$

$$= n(n-1) + 2n - 2k - 2a_{n-1}$$

$$= n(n-1) + n - 2a_{n-1}$$

پس $n-1 \mid n - 2a_{n-1}$ و یا معادلاً $2k-1 \mid 2k - 2a_{n-1}$ و در نتیجه $2k-1 \mid k - a_{n-1}$ ، اما به وضوح $2k-1 < k - a_{n-1}$ و

بنابراین $k - a_{n-1} = 0$ یا $a_{n-1} = k$ که تناقض است (چون a_n هم برابر k بود). بنا بر مطالب بالا در هر جای‌گشت با شرایط مسئله

$a_n = n$ حال a_n از دنباله حذف می‌کنیم. دنباله‌ی به‌دست‌آمده نیز جای‌گشتی از ۱ تا $n-1$ با خاصیت موردنظر مسئله‌ی است، در نتیجه

جمله آخر این دنباله یعنی a_{n-1} هم باید برابر $n-1$ باشد. به همین ترتیب مشخص است که برای هر $3 \leq k \leq n$ باید داشته باشیم

$a_k = k$ برای a_1 و a_2 هم به وضوح می‌توان دو حالت ۱ و ۲ یا ۱ را در نظر گرفت. به این ترتیب تنها دو جای‌گشت $(1, 2, \dots, n)$ و

$(2, 1, 3, \dots, n)$ خاصیت موردنظر مسئله‌ی را دارند.

۲- فرار دهید

R : تعداد مستطیل‌ها، H : تعداد خطوط افقی، V : تعداد خطوط عمودی، X : تعداد چهارراه‌ها

می‌خواهیم ثابت کنیم $H + V + X = R + 3$. برای کار مجموع زاویه‌های مستطیل‌های پوشاننده را از دو روش محاسبه می‌کنیم: اولاً

چون تعداد مستطیل‌ها R و جمع زوایای هر مستطیل 360° است، پس این مقدار برابر است با $R \times 360^\circ$. ثانیاً گره‌های شکل به صورت

یکی از انواعی است که در شکل ۱ (ابتدای صفحه‌ی بعد) می‌بینید.

تعداد گره‌های نوع (۱) یعنی رأس‌های مستطیل بزرگ فقط ۴ تا است. تعداد گره‌های نوع (۳) هم که تا است. اما تعداد گره‌های نوع (۲) چند تا

است؟ اگر به شکل دقت کنید متوجه خواهید شد که هر یک از دو سر یک پاره‌خط افقی و عمودی به غیر از چهار ضلع مستطیل بزرگ به گره

از نوع (۲) ختم می‌شود. بنابراین تعداد گره‌های نوع (۲) برابر است با $2 \times (H + V - 4)$. حال توجه کنید که گره‌های نوع (۱)، (۲) و (۳) به

ترتیب زوایای 90° و 360° تولید می‌کنند. پس مجموع زاویه‌های مستطیل برابر است با:



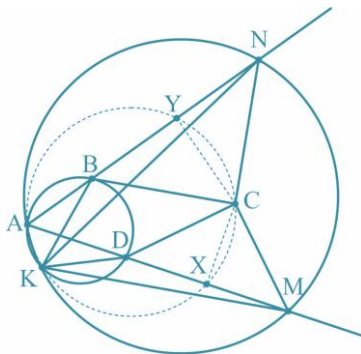
نوع (۱) نوع (۲) نوع (۳)

از مقایسه‌ی این مقدار با مقداری که در ابتدا به دست آوردیم حکم مسئله‌ی نتیجه می‌شود.

-۳

ماگ

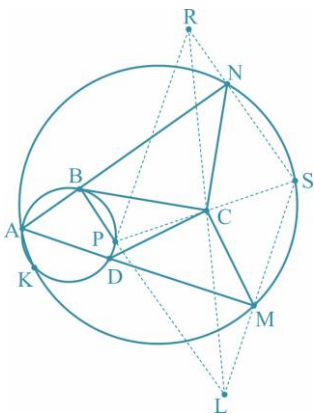
راه حل اول. نقطه‌های X و Y را به ترتیب وسط DM و BN بگیرید. با توجه به این که دو دایره در نقطه‌ی K متقاطع هستند، زاویه‌های $\angle KMD$ و $\angle KNB$ در دایره‌ی محیطی AMN روبه‌رو به کمان AK هستند و در نتیجه با هم برابرند. به همین ترتیب زاویه‌های $\angle KDA$ و $\angle KBA$ در دایره‌ی محیطی ABD روبه‌رو به کمان AK هستند و لذا با هم برابر هستند. برابری این زاویه‌ها نتیجه می‌دهد که دو مثلث KNB و KMD با هم متشابه هستند و در نتیجه زاویه‌های $\angle KYB$ و $\angle KXD$ که زاویه‌های بین میانه و ضلع متناظر در این دو مثلث هستند با هم برابر می‌شوند. این برابری نتیجه می‌دهد که چهار نقطه‌ی A, K, Y و X روی یک دایره‌ی قرار دارند.



از طرف دیگر با توجه به این که $\angle BCN = 90^\circ$ نتیجه می‌شود که مثلث BCN قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و لذا میانه آن یعنی YC ارتفاع هم هست و این یعنی $\angle AYC = 90^\circ$.

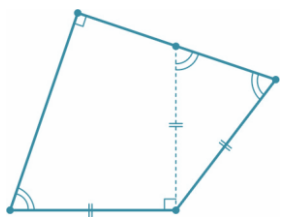
با استدلال کاملاً مشابه می‌بینیم که $\angle AXC$ هم قائمه است. پس چهار نقطه‌ی A, X, Y, C هم روی یک دایره‌ی قرار دارند. بنابراین در کل پنج نقطه‌ی A, K, Y, C, X هم دایره‌ی هستند و در نتیجه $\angle AKC = \angle AYC = 90^\circ$. بنابراین اثبات حکم به پایان می‌رسد.

راه حل دوم: باید ثابت کنیم دایره‌ی محیطی مثلث ABD ، دایره‌ی محیطی مثلث AMN و دایره‌ی به قطر AC ، غیر از A در نقطه‌ی دیگری (K) هم‌رس هستند. برای این منظور کافی است ثابت کنیم مرکزهای این سه دایره‌ی هم‌خط هستند. (چرا؟)



برای اثبات هم‌خطی مرکزهای این سه دایره، کافی است ثابت کنیم متجانس این مرکزها نسبت به A و به نسبت متجانس ۲ هم‌خط هستند. متجانس مرکز دایره‌ی به قطر AC ، C می‌باشد. متجانس مرکزهای دایره‌های محیطی ABD و AMN را که البته نقطه‌های مقابل قطری A در این دایره‌ها می‌باشند، به ترتیب P و S می‌گیریم. پس کافی است نشان دهیم سه نقطه‌ی S, P, C هم‌خط هستند. از آنجایی که زاویه‌های $\angle SMA, \angle PBA, \angle SNA, \angle PDA$ قائمه هستند، لذا $PB \parallel SN$ و $SM \parallel PD$ بنابراین اگر محل برخورد PB با SM را L و محل برخورد PD و SN را بنامیم،

چهارضلعی $PRSL$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود. حال به موقعیت نقطه‌ی C توجه کنید. فاصله‌ی C تا SL برابر فاصله‌ی C تا PD و هم‌چنین فاصله‌ی C تا SR و برابر با فاصله‌ی C تا PL است. بنابراین محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع، و در نتیجه نقطه‌های P, C و S هم‌خط هستند و حکم ثابت می‌شود.



مطابق شکل در نقطه‌ی B عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند. چون $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ، بنابراین $ADEB$ محاطی است و لذا $\angle BEC = \angle DAB$. از طرفی با توجه به فرضیات مسئله‌ی در مورد چهارضلعی $ABCD$ ، $\angle DAB = \angle BCD$ ، بنابراین $\angle BEC = \angle BCD$ و در نتیجه $BE = BC = AB$ بنابراین نقطه‌ی E روی CD نقطه‌ای ثابت در صفحه‌ی است. که مکان آن تنها به B و A بستگی دارد.

-۴

ماگ

فرض کنید $a + b\delta$ ، $(\delta \neq 0)$ ، یک ریشه $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ باشد. پس

$$0 = P(a + b\delta) = a_n (a + b\delta)^n + \dots + a_1 (a + b\delta) + a_0$$

اما با توجه به این که $\delta^2 = 0$ با استفاده از بسط دو جمله‌ای یا به کمک استقرا می‌توان به سادگی نشان داد که:

$$(a + b\delta)^k = a^k + ka^{k-1}b\delta$$

بنابراین

$$0 = (a_n + a_n a + a_n a^2 + \dots + a_n a^n) + b\delta(a_n + 2a_n a + \dots + na_n a^{n-1})$$

توجه کنید که اگر $u + \delta v = 0$ ، آنگاه با توجه به قرارداد ذکر شده در صورت مسئله $u = 0$ و $v = 0$. پس

$$a_n + a_n a + \dots + a_n a^n = P(a) = 0$$

-۵

ماگ

و می توان نوشت $P(x) = (x-a)Q(x)$. حال باید نشان دهیم که a ریشه ی $Q(x)$ هم می باشد. برای این کار Q را بر $x-a$ تقسیم می کنیم، $Q(x) = (x-a)R(x) + c$ و

$$P(x) = (x-a)((x-a)R(x) + c)$$

$$\Rightarrow 0 = P(a+b\delta) = b\delta(b\delta R(a+b\delta) + c)$$

$$= b(b\delta^2 R(a+b\delta) + c\delta) = bc\delta$$

پس $bc\delta = 0$ و در نتیجه $bc = 0$ و چون $b \neq 0$ ، پس $c = 0$. بنابراین $P(x) = (x-a)^2 R(x)$.

برای اثبات طرف دیگر چون a ریشه مضاعف $P(x)$ است، پس $P(x) = (x-a)^2 R(x)$. در این صورت برای هر $x = a + b\delta$ ($b \neq 0$) خواهیم داشت،

$$P(a+b\delta) = (b\delta)^2 R(a+b\delta) = 0$$

فرض کنید این ۲۰ نفر به ترتیب x_1, x_2, \dots, x_{20} . بازی انجام داده باشند. چون در مجموع ۱۰۰ بازی انجام شده است، لذا

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = 200$$

تعداد راه های انتخاب دو تیم دو نفره با شرایط مسئله ی برابر است با $\sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2}$. زیرا برای انتخاب دو تیم دو نفره، که دو نفر

هم تیمی با هم بازی کرده باشند، باید دو تا از ۱۰۰ بازی انجام شده را انتخاب کنیم (به $\binom{100}{2}$ روش) و دو نفر شرکت کننده در هر بازی را به

عنوان یک تیم بگیریم. اما از این تعداد، باید حالتی را که دو تیم عضو مشترک پیدا می کنند کم کنیم. تعداد حالت ها برابر $\sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2}$

است، زیرا اگر عضو مشترک دو تیم، نفر k باشد، دو عضو دیگر تیم ها باید از بین x_k نفری انتخاب شوند که با نفر k بازی کرده اند. پس،

$$4050 = \binom{100}{2} - \sum_{k=1}^{20} \binom{x_k}{2} = 4950 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} x_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} x_k$$

$$\text{بنابراین } \sum_{k=1}^{20} x_k^2 = 2000 \text{ پس}$$

$$\frac{1}{20} \sum_{k=1}^{20} x_k^2 = \left(\frac{\sum_{k=1}^{20} x_k}{20} \right)^2$$

اما می دانیم که برای هر n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 \geq \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)^2$$

و تساوی تنها زمانی اتفاق می افتد که $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. بنابراین در مسئله ی فوق هم باید $x_1 = x_2 = \dots = x_{20}$ باشند.